Lösung: Serie 2

1. **(a)** Beachte dass für Teilmengen $O, A \subset E$: (i) $O \subset A \Leftrightarrow A^c \subset O^c$; (ii) $O \in \mathcal{T} \Leftrightarrow O^c$ ist abgeschlossen in $(E, \mathcal{T})$. Daher gilt, unter Anwendung der de Morganschen Gesetze:

$$(A^o)^c = \left(\bigcup_{A \supset O \in \mathcal{T}} O \right)^c = \bigcap_{A \supset O \in \mathcal{T}} O^c = \bigcap_{A^c \subset F,\, F \text{ abg.}} F = \overline{A^c},$$
$$(\bar{A})^c = \left(\bigcap_{A \subset F,\, F \text{ abg.}} F \right)^c = \bigcup_{A \subset F,\, F \text{ abg.}} F^c = \bigcup_{A^c \supset O \in \mathcal{T}} O = (A^c)^o.$$

(b) Wenn $A \subset B$, dann

$$A^o = \bigcup_{A \supset O \in \mathcal{T}} O \subset \bigcup_{B \supset O \in \mathcal{T}} O = B^o,$$
$$\bar{A} = \bigcap_{A \subset F,\, F \text{ abg.}} F \subset \bigcap_{B \subset F,\, F \text{ abg.}} F = \bar{B}.$$

(c) ist eine direkte Konsequenz der Definition $A^o = \bigcup_{A \supset U \in \mathcal{T}} U$. **(d)** Wir haben

$$\bar{A} = \bigcap_{A \subset F,\, F \text{ abg.}} F = \bigcap_{A^c \supset U \in \mathcal{T}} U^c.$$

Daher gilt:

$$\begin{aligned} x \in \bar{A} &\Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{T} : [U \subset A^c \Rightarrow x \in U^c] \\ &\Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{T} : [x \in U \Rightarrow A \cap U \neq \emptyset] . \end{aligned}$$

2. Wir verwenden, dass $\partial Y = \overline{Y} \setminus Y^\circ$ ist. Dann ist

   a) $\overline{Y} = Y^\circ = Y$, da Y sowohl offen wie auch abgeschlossen ist und somit gilt $\partial Y = \emptyset$.

   b) Falls $\emptyset \neq Y \neq X$, dann ist $Y^\circ = \emptyset$, da $\emptyset$ die einzige offene Menge in Y ist. Analog gilt $\overline{Y} = X$ und somit $\partial Y = X$. In den trivialen Fällen $Y \in \{\emptyset, X\}$ gilt $Y = Y^\circ = \overline{Y}$ und $\partial Y = \emptyset$.

   c) $\overline{Y} = X$, $Y^\circ = Y$, $\partial Y = \{2\}$, da X die einzige abgeschlossene Menge ist die Y enthält und Y offen ist.

3. Wenn $f : (E_1, \mathcal{T}_1) \to (E_2, \mathcal{T}_2)$ und $g : (E_2, \mathcal{T}_2) \to (E_3, \mathcal{T}_3)$ stetig sind, dann gilt für $O \in \mathcal{T}_3$: $g^{-1}(O) \in \mathcal{T}_2$ (Stetigkeit von g) und darum $(g \circ f)^{-1}(O) = f^{-1}(g^{-1}(O)) \in \mathcal{T}_1$ (Stetigkeit von f). Also ist $g \circ f : (E_1, \mathcal{T}_1) \to (E_3, \mathcal{T}_3)$ stetig.

4. Wir wissen bereits dass f genau dann stetig ist wenn das Urbild jeder abgeschlossenen Menge unter f wieder abgeschlossen ist.

"**a** $\Rightarrow$ **b**": Wegen $A \subset f^{-1}(f(A)) \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$ bekommen wir $\overline{A} \subset \overline{f^{-1}(\overline{f(A)})} = f^{-1}(\overline{f(A)})$, wobei wir in der letzten Gleichheit die Stetigkeit von f benutzt haben. Daher gilt $f(\overline{A}) \subset f(f^{-1}(\overline{f(A)})) \subset \overline{f(A)}$.

"**b** $\Rightarrow$ **a**": Umgekehrt, sei $B \subset Y$ abgeschlossen und $A := f^{-1}(B)$. Dann gilt $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)} = \overline{f(f^{-1}(B))} \subset \overline{B} = B$; das heisst, $\overline{A} \subset f^{-1}(f(\overline{A})) \subset f^{-1}(B) = A$, also ist A abgeschlossen. Dies zeigt die Stetigkeit von f.

"**a** $\Rightarrow$ **c**": Wenn $\mathcal{T}$ bzw. $\mathcal{T}'$ Topologien auf E bzw. E' bezeichnen, dann bekommen wir unter Benutzung der Stetigkeit von f,

$$f^{-1}(B^o) = f^{-1}\left(\bigcup_{B \supset O' \in \mathcal{T}'} O'\right) = \bigcup_{B \supset O' \in \mathcal{T}'} f^{-1}(O') \subset \bigcup_{f^{-1}(B) \supset O \in \mathcal{T}} O = [f^{-1}(B)]^o.$$

"**c** $\Rightarrow$ **a**": Sei $B \subset Y$ offen. Dann gilt $f^{-1}(B) = f^{-1}(B^o) \subset [f^{-1}(B)]^o$, also ist $f^{-1}(B)$ offen. Dies zeigt die Stetigkeit von f.

5. Es bezeichne $\hat{\mathcal{T}} \subset \mathcal{P}(E)$ die Menge welche $\emptyset$, E sowie alle Vereinigungen von endlichen Durchschnitten von Mengen in $\mathcal{U}$ als Elemente beinhaltet. Offensichtlich gilt $\mathcal{U} \subset \hat{\mathcal{T}} \subset \mathcal{T}(\mathcal{U})$, letztere Inklusion gilt weil $\hat{\mathcal{T}} \subset \mathcal{S}$ für jede Topologie $\mathcal{S}$ auf E mit $\mathcal{U} \subset \mathcal{S}$. Wir müssen nur noch verifizieren dass $\hat{\mathcal{T}}$ eine Topologie ist. Offensichtlich enthält $\hat{\mathcal{T}}$ die leere Menge $\emptyset$, den vollen Raum E, und ist "abgeschlossen unter beliebigen Vereinigungen". $\hat{\mathcal{T}}$ ist auch "abgeschlossen unter endlichen Durchschnitten": Wenn $Y_1, \ldots, Y_n \in \hat{\mathcal{T}}$, dann ist Y_i für jedes $i = 1, \ldots, n$ von der Form

$$Y_i \equiv \bigcup_{\alpha_i \in I_i} X_{\alpha_i},$$

wobei I_i eine Indexmenge und $X_{\alpha_i} \subset E$ ein endlicher Durchschnitt von Mengen in $\mathcal{U}$ ist, für $\alpha_i \in I_i$. Setze $I := I_1 \times \cdots \times I_n$. Dann gilt

$$\bigcap_{i=1}^{n} Y_i = \bigcap_{i=1}^{n} \bigcup_{\alpha_i \in I_i} X_{\alpha_i} = \bigcup_{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in I} \bigcap_{i=1}^{n} X_{\alpha_i} \in \hat{\mathcal{T}},$$

denn für alle $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in I$ ist $\bigcap_{i=1}^{n} X_{\alpha_i}$ ein endlicher Durchschnitt von Mengen in $\mathcal{U}$.

6. "$\Rightarrow$" ist klar, denn $\mathcal{U}' \subset \mathcal{T}'$. "$\Leftarrow$": Nach Aufgabe 5 besteht $\mathcal{T}'$ aus $\emptyset$, E' und allen Vereinigungen von endlichen Durchschnitten von Mengen in $\mathcal{U}'$. Wir haben $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{T}$ und $f^{-1}(E') = E \in \mathcal{T}$. Weil die Mengenabbildung $f^{-1} : \mathcal{P}(E') \to \mathcal{P}(E)$ mit Vereinigungen und Durchschnitten kommutiert, folgt dass $f^{-1}(O') \in \mathcal{T}$ für alle $O' \in \mathcal{T}'$; nämlich, $f^{-1}(O')$ ist deswegen eine Vereinigung von endlichen Durchschnitten von Mengen in $\mathcal{T}$, und $\mathcal{T}$ ist eine Topologie.

7. **(a)-(c)**: Der Leser überzeuge sich dass $\mathcal{T}_Y$ tatsächlich eine Topologie auf Y ist! $\mathcal{T}_Y$ ist die durch $I_Y : Y \to (E, \mathcal{T})$ erzeugte Initialtopologie/schwache Topologie, denn $\mathcal{T}(\{I_Y^{-1}(U) : U \in \mathcal{T}\}) = \mathcal{T}(\mathcal{T}_Y) = \mathcal{T}_Y$ wegen $I_Y^{-1}(U) = U \cap Y$. (a)-(c) folgen nun aus den entsprechenden Eigenschaften der Initialtopologie/schwachen Topologie (vgl. Vorlesung vom Donnerstag, 10. März 2016).
   (d) Beachte dass $I_Y : (Y, \mathcal{T}_Y) \to (E, \mathcal{T})$ stetig ist. Damit ist $f|Y = f \circ I_Y : (Y, \mathcal{T}_Y) \to (E', \mathcal{T}')$ stetig, wenn $f : (E, \mathcal{T}) \to (E', \mathcal{T}')$ stetig ist (siehe Aufgabe 3).
   (e) In der Tat, B ist abgeschlossen in $(Y, \mathcal{T}_Y) \Leftrightarrow Y \cap B^c \in \mathcal{T}_Y \Leftrightarrow \exists U \in \mathcal{T} : Y \cap B^c = U \cap Y \Leftrightarrow \exists U \in \mathcal{T} : B = Y \cap B = U^c \cap Y \Leftrightarrow \exists F$ abgeschlossen in $(E, \mathcal{T})$: $B = F \cap Y$.
   (f) $B \in \mathcal{T}_Y \Leftrightarrow \exists U \in \mathcal{T} : B = U \cap Y \Leftrightarrow B \in \mathcal{T}$. (Letztere Äquivalenz: "$\Leftarrow$" ist trivial (nimm $U = B$) and "$\Rightarrow$" ist wahr wenn $Y \in \mathcal{T}$.)
   Mit (e) bekommen wir: B ist abgeschlossen in $(Y, \mathcal{T}_Y) \Leftrightarrow \exists F$ abgeschlossen in $(E, \mathcal{T})$: $B = F \cap Y \Leftrightarrow B$ abgeschlossen in $(E, \mathcal{T})$ ("$\Leftarrow$': nimm $F = B$; "$\Rightarrow$" ist wahr wenn Y abgeschlossen ist).

8. a) Die Menge $(0, 1]$ ist offen in A bezüglich der Teilraumtopologie, da $(0, 2) \cap A = (0, 1]$, aber nicht offen in $\mathbb{R}$. Nach Aufgabe 7f können wir keine solche Menge in B finden.

   b) Die Mengen A und B sind beide sowohl offen als auch abgeschlossen in Y. Dies folgt aus den Identitäten

$$\begin{aligned} A &= (-1, 2) \cap Y \qquad & B &= (2, 3) \cap Y \\ Y \setminus A &= B & Y \setminus B &= A. \end{aligned}$$

   Der Raum Y ist also nicht zusammenhängend.